Examenul național de bacalaureat 2022 – simulare județeană
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\log_2 2^4 < \sqrt{25} < \left(\frac{2}{11}\right)^{-1}$.

5p **2.** Determinați numerele reale b și c dacă graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+bx+c$, conține punctul $A(0,\ 1)$ și admite ca axa de simetrie dreapta de ecuație $x=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\sqrt{x-2}=2-x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural din intervalul $[23,\ 72]$, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** Se consideră a un număr real nenul, triunghiul ABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}=a\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{CA}=a\overrightarrow{CP}$. Arătați că $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & -m & m^2\\ m & -m^2 & m\\ m & 1 & -m^3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x-my+m^2z=m\\ mx-m^2y+mz=1\\ mx+y-m^3z=1\end{cases}$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=30$.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că dacă $m\neq 0$, atunci sistemul de ecuații este compatibil.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ și legea de compoziție asociativă, $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$ pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Verificați dacă $10*(-10)=0$.

5p **b)** Determinați soluțiile ecuației $\frac{x-1}{2\sqrt{x}}*\frac{x-1}{2\sqrt{x}}+\frac{3x}{2}=0$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x*y)=f(x)+f(y)$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x\ln x-(1-x)\ln(1-x), & \text{dacă } x\in(0,1)\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$.

5p **a)** Verificați dacă $f'(x)=\ln\dfrac{1-x}{x}$, oricare ar fi $x\in(0,1)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este continuă în $x=0$.

5p **c)** Dacă $a,b\in(0,1)$ și $a+b=1$, atunci demonstrați că $a\ln a+b\ln b\geq\ln\dfrac{1}{2}$.

2. Se consideră funcțiile F, $f:\left[\dfrac{2}{\pi},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=-\sin\dfrac{1}{x}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ și șirul $(I_n)_{n\geq1}$, unde $I_n=\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{n}f(t)dt$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}F\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=-\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.